2. Rugalmas állandók mérése

PÁPICS PÉTER ISTVÁN
csillagász, 3. évfolyam

2005.10.27.
Beadva: 2005.12.12.

1. A 2-ES, AZAZ AZ ABLAK FELŐLI MÉRŐHELYEN MÉRTEM. Ezen a laboron a fémrudak Young-moduluszát mértük, pontosabban behajlást mértünk, és ebből számolhatunk Young-moduluszt. Külön vizsgáltuk az állandó rúdhossz és az állandó hajlítóerő esetét az erre a célra szolgáló, állítható feltámasztási pontokkal rendelkező mérőórás kétkarú emelővel.

Először lemértem csavarmikrométerrel a két választott rúd paramétereit: a téglatest két rövidebbik oldalát, valamint a henger átmérőjét. Ezekre az adatokra a végső, Young-moduluszra vonatkozó képletben lesz szükség. Vegyük most rudanként a méréseket és számításokat:

A4-ES RÚD:

A *rövidebb* él mérete csavarmikrométerrel mérve (±0,005 mm):

i	d_i (mm)	$\Delta d_i = d_i - d_{átl}$	$(\Delta d_i)^2$ (mm^2)
1	7,85		
2	7,94	-0,00428571	0,00001837
3	7,95	0,00571429	0,00003265
4	7,94	-0,00428571	0,00001837
5	7,94	-0,00428571	0,00001837
6	7,95	0,00571429	0,00003265
7	7,94	-0,00428571	0,00001837
8	7,95	0,00571429	0,00003265
9	7,79		

Itt d_i az i-edik mérés eredménye. Az 1. és utolsó pontot elhagyom, mert csak a rúd legvégén volt ilyen kiugró az érték, és a 45 cm hosszú rúdnak úgyis csak a 40 cm hosszú középső részét használtuk fel a mérés során. $d_{átlag} = 7{,}9442857\ mm$. A hiba számításához:

$$s_{d\,átl} = \sqrt{\frac{\sum_{i=2}^{8} (\Delta d_i)^2}{7 \cdot 6}} = 0{,}002020307$$

Így a rövidebbik oldalra ***d=(7,944±0,002)mm***

A *hosszabbik* él mérete csavarmikrométerrel mérve (±0,005 mm):

i	d_i (mm)	$\Delta d_i = d_i - d_{átl}$	$(\Delta di)_2$ (mm$_2$)
1	11,94	-0,001	0,000001
2	11,94	-0,001	0,000001
3	11,95	0,009	0,000081
4	11,94	-0,001	0,000001
5	11,94	-0,001	0,000001
6	11,94	-0,001	0,000001
7	11,94	-0,001	0,000001
8	11,94	-0,001	0,000001
9	11,94	-0,001	0,000001
10	11,94	-0,001	0,000001

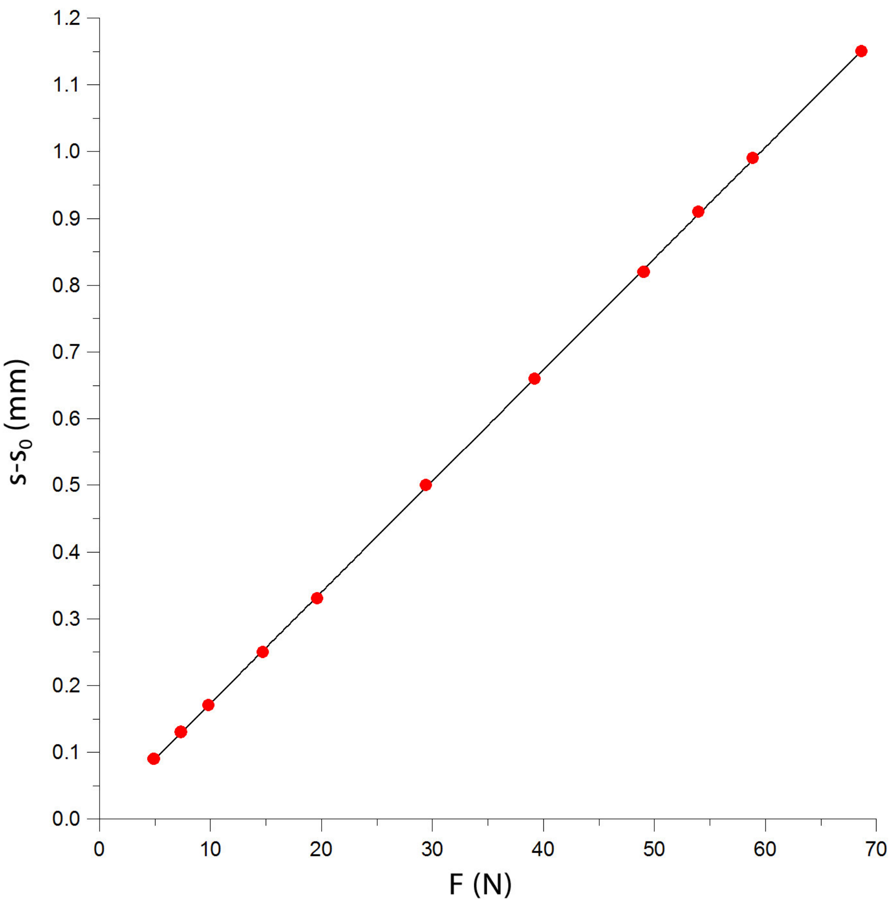
Itt d_i megint az i-edik mérés eredménye. $d_{átlag} = 11{,}941\ mm.$ A hiba számításához:

$$s_{d\,átl} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\Delta d_i)^2}{10 \cdot 9}} = 0{,}001$$

Így a hosszabbik oldalra ***d=(11,941±0,001)mm***

Következzenek az eredmények az „ÁLLÍTOTT" (a rövidebbik élén fekvő) rúd behajlására – először közzéteszem az illesztett egyenessel ellátott ábrát, majd a részletes adatokat.

A behajlás a ható erő függvényében:



A következő oldalon részletezett adatokban az alapterhelés (m_0=1250g) és az annak hatására létrejövő behajlás (s_0=0,74mm) már nem szerepel, de az illesztett egyenes meredeksége abban az esetben is ugyan akkora lenne, ha ezt a normálást nem hajtottam volna végre, csak a metszéspont nem az origóban lenne. Amiatt, hogy a Young-modulusz számításához csak a meredekség értékére van szükségünk, a tengelymetszettel nem foglalkozom. A behajlás leolvasási hibája ±0,005mm. Törekedtem rá, hogy a behajlás (s) ne legyen nagyobb l/200-nál, ami 2mm. Természetesen a grafikonon még 2mm közelében sincsenek értékek, hiszen ott már le van vonva a kezdeti 0,74mm-es behajlás! Lássuk a felhasznált adatsort:

m-m₀ ***(g)***	***F (N)***	***s-s₀ (mm)***
500	4,905	0,09
750	7,358	0,13
1000	9,810	0,17
1500	14,715	0,25
2000	19,620	0,33
3000	29,430	0,50
4000	39,240	0,66
5000	49,050	0,82
5500	53,955	0,91
6000	58,860	0,99
7000	68,670	1,15

Ezen adatokra gnuplottal illesztett egyenes meredeksége $\boldsymbol{m=(1{,}668\pm0{,}004)\cdot10^{-5}m/N}$

A Young-modulusz számításához szükség van még a következőkre:

A rúd hossza $l=(0{,}4\pm0{,}0005)m$

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka és annak hibája pedig a következő módon kapható a téglalap alapjának (a; ami most a rövidebbik él) és magasságának (b; hosszabbik él) felhasználásával:

$$I=\frac{ab^3}{12}=1{,}127145767\cdot10^{-9}m^4$$

$$\frac{\Delta I}{I}=\frac{\Delta a}{a}+3\frac{\Delta b}{b}=\frac{0{,}000002}{0{,}007944}+3\frac{0{,}000001}{0{,}011941}=5{,}029975763\cdot10^{-4}$$

$$\Delta I=5{,}669515889\cdot10^{-13}$$

$\boldsymbol{I=(1{,}1271\pm0{,}0006)\cdot10^{-9}m^4}$

Végül a Young-modulusz és annak hibája a következő képletekből adódik:

$$E=\frac{l^3}{48\cdot mI}=7{,}092188019\cdot10^{10}Pa$$

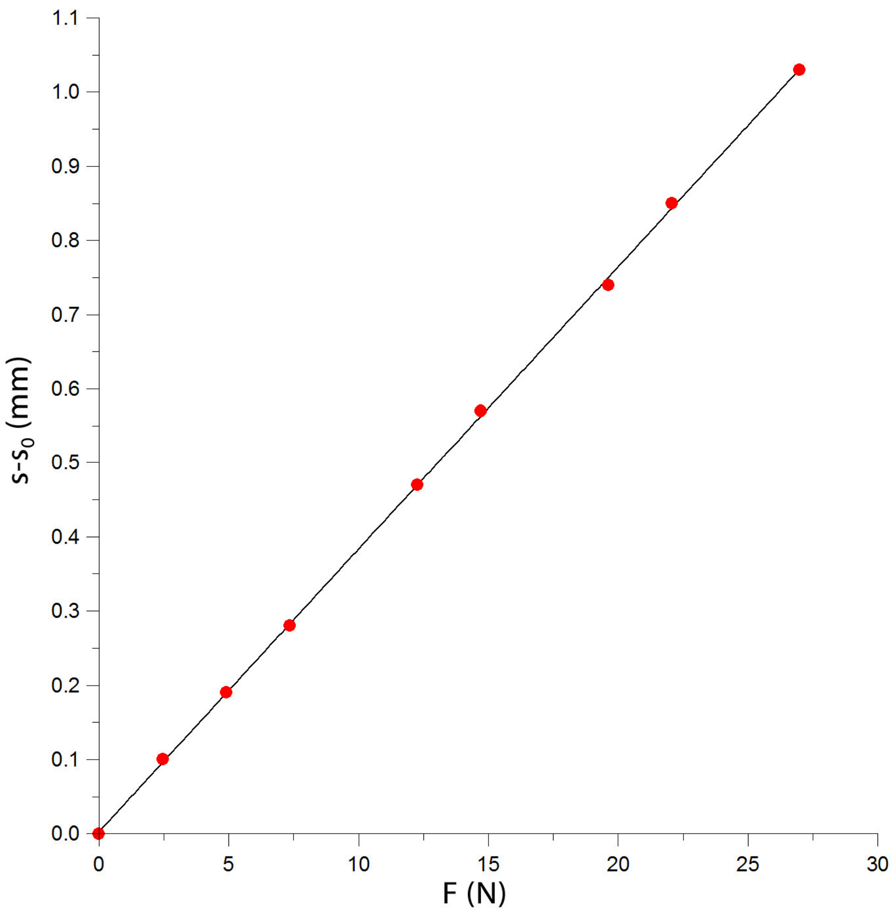
$$\frac{\Delta E}{E}=3\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta m}{m}+\frac{\Delta I}{I}=3\frac{0{,}0005}{0{,}4}+\frac{0{,}004}{1{,}668}+\frac{0{,}0006}{1{,}1271}=6{,}680421167\cdot10^{-3}$$

$$\Delta E=4{,}737880297\cdot10^{8}$$

$\boldsymbol{\underline{E=(7{,}09\pm0{,}05)\cdot10^{10}Pa}}$

Következzenek az eredmények a „FEKTETETT" (a hosszabbik élén fekvő) rúd behajlására – először közzéteszem az illesztett egyenessel ellátott ábrát, majd a részletes adatokat.

A behajlás a ható erő függvényében:



A felhasznált adatok:

m-m_0 (g)	*s-s_0 (mm)*	*F (N)*
0	0,000	0,00
250	0,100	2,45
500	0,190	4,91
750	0,280	7,36
1250	0,470	12,26
1500	0,570	14,72
2000	0,740	19,62
2250	0,850	22,07
2750	1,030	26,98

Az előző hasonló mérésnél leírtak itt is érvényesek, a behajlás leolvasási hibája ±0,005mm. Törekedtem rá, hogy a behajlás (s) ne legyen nagyobb 1/200-nál, ami 2mm. Az adatokban az alapterhelés (m_0=1250g) és az annak hatására létrejövő behajlás (s_0=0,93mm) már nem szerepel.

Az adatokra illesztett egyenes meredeksége $\boldsymbol{m=(3{,}81\pm0{,}02)\cdot10^{-5}m/N}$

A Young-modulusz számításához szükség van még a következőkre:

A rúd hossza *l=(0,4±0,0005)m*

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka és annak hibája a következő módon kapható a téglalap alapjának (a; ami most a hosszabbik él) és magasságának (b; rövidebb él) felhasználásával:

$$I = \frac{ab^3}{12} = 4{,}988582499 \cdot 10^{-10} m^4$$

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\Delta a}{a} + 3\frac{\Delta b}{b} = \frac{0{,}000001}{0{,}011941} + 3\frac{0{,}000002}{0{,}007944} = 8{,}390320890 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta I = 4{,}185580799 \cdot 10^{-13}$$

I=(4,989±0,004)·10^-10^m^4^

$$I = (4{,}989 \pm 0{,}004) \cdot 10^{-10} m^4$$

Végül a Young-modulusz és annak hibája a következő képletekből adódik:

$$E = \frac{l^3}{48 \cdot mI} = 7{,}014557135 \cdot 10^{10} Pa$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 3\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta I}{I} = 3\frac{0{,}0005}{0{,}4} + \frac{0{,}02}{3{,}81} + \frac{0{,}004}{4{,}989} = 9{,}801107713 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta E = 6{,}875043004 \cdot 10^{8}$$

$$\underline{\boldsymbol{E = (7{,}01 \pm 0{,}07) \cdot 10^{10} Pa}}$$

A két eredményből elméletileg igaznak kell lennie a következő összefüggésnek:

$$\frac{m'}{m''} = \frac{I''}{I'} \Rightarrow \frac{m'I'}{m''I''} = 1$$

Az általam kapott adatokkal ez a hányados = 0,989 ami minden lehetséges hibaforrást egybevetve jó eredménynek tekinthető.

Az eredmények alapján a hasáb anyaga valószínűleg alumínium vagy ún. szürkeöntvény. (Forrás: Négyjegyű függvénytáblázatok… 1998, Bp. – Nemzeti Tk.)

V4-ES RÚD:

A *hengeres rúd* átmérője csavarmikrométerrel mérve (±0,005 mm):

i	d_i (mm)	$\Delta d_i = d_i - d_{átl}$	$(\Delta d_i)^2$ (mm^2)
1	11,92	-0,007	0,000049
2	11,93	0,003	0,000009
3	11,92	-0,007	0,000049
4	11,93	0,003	0,000009
5	11,92	-0,007	0,000049
6	11,93	0,003	0,000009
7	11,93	0,003	0,000009
8	11,93	0,003	0,000009
9	11,93	0,003	0,000009
10	11,93	0,003	0,000009

Itt d_i megint csak az i-edik mérés eredménye. $d_{átlag} = 11{,}927\ mm$. A hiba számításához:

$$s_{d\,átl} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} (\Delta d_i)^2}{10 \cdot 9}} = 0{,}001527525$$

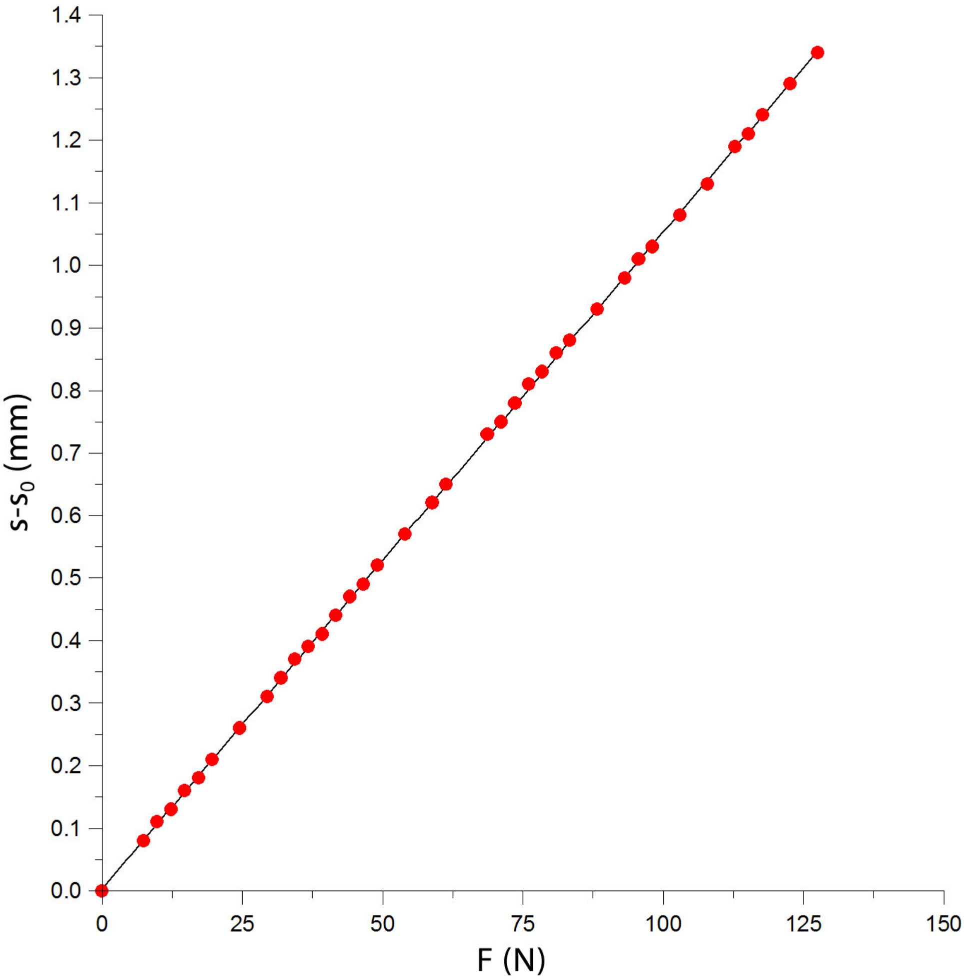
Így a sugárra adódik $\boldsymbol{R=(5{,}9635 \pm 0{,}0008)mm}$

Következzenek az eredmények a „HENGERES" rúd behajlására – először közzéteszem a részletes adatokat, majd az illesztett egyenessel ellátott ábrát, és az egyenes meredekségét.

$m-m_0$ (g)	$s-s_0$ (mm)	F (N)
0	0,00	0,0000
750	0,08	7,3575
1000	0,11	9,8100
1250	0,13	12,2625
1500	0,16	14,7150
1750	0,18	17,1675
2000	0,21	19,6200
2500	0,26	24,5250
3000	0,31	29,4300
3250	0,34	31,8825
3500	0,37	34,3350
3750	0,39	36,7875
4000	0,41	39,2400
4250	0,44	41,6925
4500	0,47	44,1450
4750	0,49	46,5975
5000	0,52	49,0500
5500	0,57	53,9550
6000	0,62	58,8600

$m-m_0$ (g)	$s-s_0$ (mm)	F (N)
6250	0,65	61,3125
7000	0,73	68,6700
7250	0,75	71,1225
7500	0,78	73,5750
7750	0,81	76,0275
8000	0,83	78,4800
8250	0,86	80,9325
8500	0,88	83,3850
9000	0,93	88,2900
9500	0,98	93,1950
9750	1,01	95,6475
10000	1,03	98,1000
10500	1,08	103,0050
11000	1,13	107,9100
11500	1,19	112,8150
11750	1,21	115,2675
12000	1,24	117,7200
12500	1,29	122,6250
13000	1,34	127,5300

A behajlás a ható erő függvényében:



Az előző hasonló mérésnél leírtak itt is érvényesek, a behajlás leolvasási hibája ±0,005mm. Törekedtem rá, hogy a behajlás (s) ne legyen nagyobb l/200-nál, ami 2mm. Az adatokban az alapterhelés (m_0=1000g) és az annak hatására létrejövő behajlás (s_0=0,60mm) már nem szerepel.

Az adatokra illesztett egyenes meredeksége $\boldsymbol{m=(1{,}049\pm0{,}002)\cdot10^{-5}m/N}$

A Young-modulusz számításához szükség van még a következőkre:

A rúd hossza $l=(0{,}4\pm0{,}0005)m$

A keresztmetszet másodrendű nyomatéka és annak hibája a következő módon kapható:

$$I=\frac{\pi}{4}R^4=9{,}933327989\cdot10^{-10}m^4$$

$$\frac{\Delta I}{I}=4\frac{\Delta R}{R}=4\frac{0{,}0008}{5{,}9635}=5{,}365976356\cdot 10^{-4}$$

$$\Delta I=5{,}330200313\cdot 10^{-13}$$

$I=(9{,}933\pm 0{,}005)\cdot 10^{-10}m^4$

Végül a Young-modulusz és annak hibája a következő képletekből adódik:

$$E=\frac{l^3}{48\cdot mI}=1{,}279625285\cdot 10^{11}\,Pa$$

$$\frac{\Delta E}{E}=3\frac{\Delta l}{l}+\frac{\Delta m}{m}+\frac{\Delta I}{I}=3\frac{0{,}0005}{0{,}4}+\frac{0{,}002}{1{,}049}+\frac{0{,}005}{9{,}933}=6{,}159950289\cdot 10^{-3}$$

$$\Delta E=7{,}882428145\cdot 10^{8}$$

$\underline{E=(1{,}280\pm 0{,}008)\cdot 10^{11}Pa}$ melyből sejthető, hogy a rúd sárgarézből készült.

Ezen a rúdon mértem ki a BEHAJLÁS l^3 FÜGGÉSÉT is:

Állandó $m+m_0$=10000g terhelés mellett mértem (a behajlás leolvasási hibája ±0,005mm, míg a rúd hosszának leolvasási, beállítási hibája ±0,0005m, míg az erő hibáját 1%-nak feltételezzük, így ΔF=±0,981N)

l (mm)	***s_0 (mm)***	***s (mm)***	***s-s_0 (mm)***	***l^3 (mm^3)***
200	0,49	0,58	0,09	8000000
220	0,49	0,63	0,14	10648000
240	0,59	0,76	0,17	13824000
260	0,52	0,73	0,21	17576000
280	0,55	0,82	0,27	21952000
300	0,60	0,94	0,34	27000000
320	0,60	1,02	0,42	32768000
340	0,56	1,06	0,50	39304000
360	0,64	1,23	0,59	46656000
380	0,69	1,40	0,71	54872000
400	0,66	1,49	0,83	64000000

A következő oldalon ábrázolom a behajlás l^3 függését.

Az adatokra illesztett egyenes meredeksége ***m=(0,0131±0,0001)m/N***

Végül a Young-modulusz és annak hibája a következő képletekből adódik:

$$E = \frac{F}{48 \cdot mI} = 1{,}570637777 \cdot 10^{11}\,Pa$$

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta F}{F} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta I}{I} = \frac{0{,}981}{98{,}1} + \frac{0{,}0001}{0{,}0131} + \frac{0{,}005}{9{,}933} = 0{,}01813696$$

$$\Delta E = 2{,}848659514 \cdot 10^{9}$$

E=(1,57±0,03)·10^{11}Pa

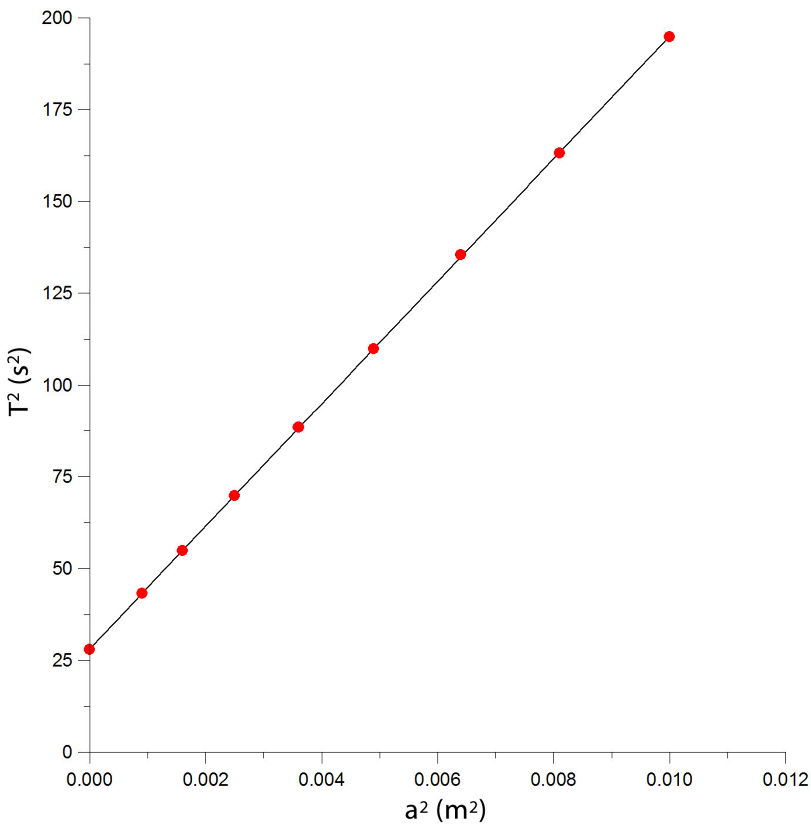
Ez az érték kicsit soknak tűnik a sárgarézre, kérdés, miből ered a két mérés eltérő eredménye. Feltételezhetően a rúd hosszával összemérhető méretű anyagszerkezeti, megmunkálásbeli különbségekre vezethető vissza.

2. A TORZIÓMODULUSZ MÉRÉSE. A mérés második felében torziós ingával mértük ki egy torziós szál torziómoduluszát. Meg kellett mérnem a huzal (sajnos a száma valamiért nincs meg, de emlékeim szerint a 4-es) és az inga, valamint a súlyok (5-ös és 6-os tárcsa) paramétereit, valamint az inga periódusidejét – ezek ismeretében akár ismeretlen testek tehetetlenségi nyomatéka is számolható.

Lássuk a mért lengésidőket:

a_{12} (cm)	***10T (s)***	***a^2 (cm^2)***	***$10T^2$ (s^2)***
0	52,84	0,00	2791,64
3	65,72	9,00	4318,99
4	74,04	16,00	5481,18
5	83,58	25,00	6985,95
6	94,01	36,00	8838,63
7	104,84	49,00	10991,64
8	116,38	64,00	13544,77
9	127,73	81,00	16315,72
10	139,58	100,00	19482,58

Itt a_{12} a tárcsák távolsága az inga forgástengelyétől, ennek hibája ±0,05mm, T pedig az inga lengésének periódusideje, melynek hibája a $10T$ hibájának tizede, így ha $10T$ hibáját ±0,005s-nek veszem, akkor T hibája ±0,0005s. Lássuk most a periódusidő négyzetét a tengelytől mért távolság négyzetének függvényében:



Az inga beállításánál nagyon fontos szerepe van a precíz kezelésnek, a lengetések közel azonos szögű elindításához, a torziós szál lengésének nullára csökkentésének, stb. Ezek szem előtt tartása mellett törekedtem mindig a lehető legjobban ugyan azt a körülményt reprodukálni, és minden lengést azonos feltételek mellett kimérni. A mérési összeállítás sajátságainak kitapasztalása után háromszor egymás után reprodukáltam pontosan ugyan azt a lengésidőt, így úgy gondolom, a beállításból vagy csillapodásból eredő hibát nem kell számolnom.

Az illesztett egyenes adatai:

$\boldsymbol{m=(16690 \pm 20)s^2/m^2}$

$\boldsymbol{b=(28,1 \pm 0,1)s^2}$

Az ingára helyezett két tárcsa adatai (az átmérőket minden esetben négy helyen mértem tolómérővel, és ugyan az az érték adódott, így az átmérő hibájának a leolvasási hibát vettem, míg a tömegek leolvasási hibája *±0,00005g,* de itt a több méréssel való számolásból kialakuló hibát használtam):

5-ös tárcsa:

$d_5=(45,00 \pm 0,05)mm$

$r_5=(22,50 \pm 0,03)mm=\boldsymbol{(0,02250 \pm 0,00003)m}$

i	m_i (kg)	$\Delta m_i=m_i-m_{átl}$	$(\Delta m_i)^2$ (kg^2)
1	0,1946524	0,0000002	4,0E-14
2	0,1946521	-0,0000001	1,0E-14
3	0,1946522	0,0000000	0,0E+00
4	0,1946521	-0,0000001	1,0E-14

Itt m_i az i-edik mérés eredménye. $m_{átlag}=0,1946522$ *kg.* A hiba számításához:

$$s_{m\,átl}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(\Delta m_i)^2}{4\cdot 3}}=0,000000071$$

$\boldsymbol{m_5=(0,19465220 \pm 0,00000007)kg}$

6-os tárcsa:

$d_6=(45,00 \pm 0,05)mm$

$r_6=(22,50 \pm 0,03)mm=\boldsymbol{(0,02250 \pm 0,00003)m}$

i	m_i (kg)	$\Delta m_i=m_i-m_{átl}$	$(\Delta m_i)^2$ (kg^2)
1	0,1962985	0,0000005250	2,7562500000E-13
2	0,1962982	0,0000002250	5,0624999997E-14
3	0,1962977	-0,0000002750	7,5625000012E-14
4	0,1962975	-0,0000004750	2,2562500000E-13

Itt m_i az i-edik mérés eredménye. $m_{átlag}$*=0,1962980 kg*. A hiba számításához:

$$s_{m\,átl} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{4}(\Delta m_i)^2}{4\cdot 3}} = 0{,}000000228 \qquad \boldsymbol{m_6=(0{,}1962980\pm 0{,}0000002)kg}$$

A torziós szál méretét csavarmikrométerrel mértem meg, itt sem volt eltérés a szál teljes hosszán a leolvasott értékek között, így a leolvasási hibával számolok. Így a torziós szál átmérője, sugara és a „mérőszalaggal" mért hossza:

d=(0,510±0,005)mm

r**=(0,255±0,003)mm=**(0,000255±0,000003)m

l=(0,5920±0,0005)m

Először számoljuk ki K állandót és annak hibáját:

$$K = \frac{8\pi l}{r^4} = 3{,}518850732\cdot 10^{15}\,m^{-3}$$

$$\frac{\Delta K}{K} = \frac{\Delta l}{l} + 4\frac{\Delta r}{r} = \frac{0{,}0005}{0{,}5920} + 4\frac{0{,}000003}{0{,}000255} = 0{,}047903418 \Rightarrow \Delta K = 1{,}685649779\cdot 10^{14}\,m^{-3}$$

$$\boldsymbol{K=(3{,}5\pm 0{,}2)\cdot 10^{15}m^{-3}}$$

Ebből a torziómodulusz és annak hibája:

$$G = K\frac{m_5+m_6}{m} = 8{,}198476333\cdot 10^{10}\,Pa$$

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta m_5 + \Delta m_6}{m_5+m_6} + \frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}2}{3{,}5} + \frac{0{,}000000027}{0{,}3909502} + \frac{20}{16690} = 0{,}058341248$$

$$\Rightarrow \Delta G = 4{,}783093455\cdot 10^{9}\,Pa$$

$$\underline{\boldsymbol{G = (8{,}2\pm 0{,}5)\cdot 10^{10}Pa = (82\pm 5)GPa}}$$

Az eredményből feltételezem, hogy a torziós szál ***acél***ból készült.

Számoljuk ki a tárcsák és a rendszer tehetetlenségi nyomatékait és a hibákat:

$$\Theta_5 = \frac{1}{2}m_5 r_5^2 = 4{,}927133813\cdot 10^{-5}\,m^2kg$$

$$\frac{\Delta\Theta_5}{\Theta_5} = \frac{\Delta m_5}{m_5} + 2\frac{\Delta r_5}{r_5} = \frac{0{,}00000007}{0{,}19465220} + 2\frac{0{,}00003}{0{,}02250} = 2{,}667\cdot 10^{-3} \Rightarrow \Delta\Theta_5 = 1{,}31408\cdot 10^{-7}$$

Θ₅=(4,93±0,01)·10⁻⁵m²kg

$$\Theta_6 = \frac{1}{2} m_6 r_6^2 = 4{,}968793125 \cdot 10^{-5} m^2 kg$$

$$\frac{\Delta\Theta_6}{\Theta_6} = \frac{\Delta m_6}{m_6} + 2\frac{\Delta r_6}{r_6} = \frac{0{,}0000002}{0{,}1962980} + 2\frac{0{,}00003}{0{,}02250} = 2{,}667686 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \Delta\Theta_6 = 1{,}3255178 \cdot 10^{-7}$$

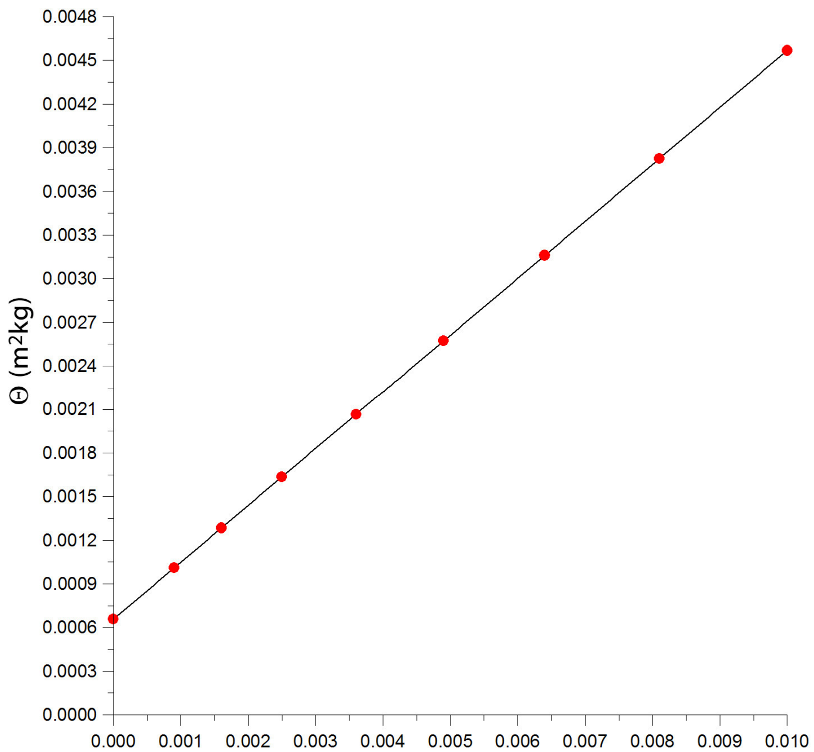
Θ_6=(4,97±0,01)·10^{-5}m^{2}kg

Továbbá az inga+tárcsák rendszer nyomatéka:

$$\Theta = \Theta_{ü} + \Theta_5 + \Theta_6 + (m_5 + m_6) \cdot a^2 = \frac{Gb}{K} - \Theta_5 - \Theta_6 + \Theta_5 + \Theta_6 + (m_5 + m_6) \cdot a^2 =$$
$$= b\frac{m_5 + m_6}{m} + (m_5 + m_6) \cdot a^2 = 28{,}1\frac{0{,}19465220 + 0{,}1962980}{16690} + (0{,}19465220 + 0{,}1962980) \cdot a^2 =$$
$$= 6{,}582205285 \cdot 10^{-4} + 0{,}3909502 \cdot a^2$$

$\Theta_{rendszer}$=6,5822·10^{-4}m^{2}kg+0,39095·a^2

Ez alapján lássuk Θ-t az a^2 függvényében (a következő oldalon vannak az adatok):



a^2 (m^2)	Θ (m^2kg)
0,0000	0,000658220
0,0009	0,001010075
0,0016	0,001283740
0,0025	0,001635595
0,0036	0,002065640
0,0049	0,002573875
0,0064	0,003160300
0,0081	0,003824915
0,0100	0,004567720

Számoljuk ki az üres rendszer tehetetlenségi nyomatékát, a hibaszámításban a tömegmérés pontossága miatt a tömegeket tartalmazó tagokat el lehet hagyni:

$$\Theta_{ü} = b\frac{m_5 + m_6}{m} - \Theta_5 - \Theta_6 = \left(28{,}1\frac{0{,}19465220 + 0{,}1962980}{16690} - (4{,}93 + 4{,}97)\cdot 10^{-5}\right) m^2 kg =$$
$$= 5{,}592205285 \cdot 10^{-4}\, m^2 kg$$

$$\frac{\Delta\Theta_{ü}}{\Theta_{ü}} = \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta m}{m} = \frac{0{,}1}{28{,}1} + \frac{20}{16690} = 0{,}004757 \Rightarrow \Delta\Theta_{ü} = 2{,}66 \cdot 10^{-6}\, m^2 kg$$

$\Theta_{üres}$=(5,59±0,03)·$10^{-4}m^2kg$

Azzal, hogy a 11. oldal alján látható ábrán T^2 és a^2 között lineáris összefüggés mutatkozik, lényegében a Steiner-tételt is bebizonyítottuk. Az illesztés során a korrelációs együttható ***r=0,9999925***-nek adódott (ez számszerűsíti is a lineáris összefüggésre tett „megérzésünket”).