3. Hangfrekvenciás mechanikai rezgések vizsgálata

PÁPICS PÉTER ISTVÁN
csillagász, 3. évfolyam

2005.11.10.
Beadva: 2005.12.15.

1. A 2-ES, AZAZ AZ ABLAK FELŐLI MÉRŐHELYEN MÉRTEM. Első lépésként a C jelű mintát fogtam satuba – a detektort nagyjából 1,5 cm-re helyeztem el a befogott végtől, a gerjesztő elektromágnest pedig az utolsó cm alá pozícionáltam. 50 Hz-ről indulva elkezdtem növelni a frekvenciát, majd az első pont, ahol a feszültségmérő „lokális" maximumot mutatott (a hiba jelen esetben a leolvasási hiba, de nem írok ki annyi tizedest a mért értékből, amennyi a hibában szerepel, mert akkor egy plusz nullával az összes értéket meg kéne toldanom – más kérdés, hogy a rezonancia értékének beálltása tapasztalataim szerint közel sem ilyen pontos, tehát a hiba valószínűleg ennél nagyobb lehet):

ν_{00}=(182,30±0,005)Hz

Feltételeztem, hogy ez az alapharmonikus, ennek alátámasztására megnéztem a $2\nu_{00}$ környezetében az értékeket, és nem tapasztaltam lokális maximum jelenlétét, így kijelenthettem, hogy feltételezésem helyes. Kiszámoltam a

$$\frac{\nu_{0i}}{\nu_{00}} = \left(\frac{k_i}{k_o}\right)^2 \quad \text{képlettel ekvivalens} \quad \nu_{0i} = \left(\frac{k_i}{k_{i-1}}\right)^2 \cdot \nu_{0i-1}$$

képletből az elméleti felharmonikusok értékeit *i=(1,2,3,4)*-re, majd a gyakorlatban is kimértem ezen sajátfrekvenciák értékeit. Elméletileg ez a két képlet tényleg ekvivalens, és a gyakorlatvezető így ismertette (ezért így számoltam), de annyiban előnyösebb lett volna mindig az alapharmonikusból számolni, hogy a számított felharmonikusok kerekítéséből adódó kisebb hibák nem halmozódtak volna tovább a következő számításoknál, mert a mindig csak egyszeri hibával terhelt alapharmonikusból következtek volna az értékek. Más kérdés, hogy úgysem lehet hibahatáron belül megtalálni a felharmonikusokat, ezért nincs értelme a kerekítési illetve leolvasási hibákon kívül más hiba számításának, sőt még ezek feltüntetésének létjogosultsága is erősen megkérdőjelezhető.

Pl. az első felharmonikus számolása (a hiba itt a kerekítésből származó lehetséges hiba mértéke):

$$\nu_{01} = \left(\frac{4{,}69409}{1{,}87510}\right)^2 \cdot \nu_{00} = (1142{,}46 \pm 0{,}005)Hz$$

A mért érték ezzel jól megegyezett: ***ν_{01} =(1156,92±0,005)Hz***

Lényegében az első számított értéknél való felharmonikus-találtat is bizonyította, hogy a mérés elején talált ν_{00} alapharmonikus. A frekvenciák kétszeresénél nem találtam gerjesztést, ez is legutóbbi állításomat támasztja alá.

Hasonló módon jártam el a következő felharmonikusok keresésénél, majd minden *mért* érték felénél is megkerestem a feles gerjesztések (később ν_{0i}'-k) helyét is.

Az eredményeket összefoglaló táblázat (mért és leolvasott értékek hibája minden esetben *±0,005Hz* a számított feles értékeknél viszont *±0,003Hz*):

i	***számolt (Hz)***	***mért (Hz)***	$(k_i/k_0)^2$	ν_{0i}/ν_{00}	***eltérés (%)***
0		**182,30**	1	1	
0'	91,15	***91,23***			0,09
1	1142,46	**1156,92**	6,266917	6,3462425	1,27
1'	578,46	***578,62***			0,03
2	3198,92	**3237,47**	17,547570	17,759024	1,21
2'	1618,74	***1618,60***			0,01
3	6268,56	**6314,94**	34,385956	34,640373	0,74
3'	3157,47	***3237,15***			2,52
4	10362,36	**10350,60**	56,842320	56,777839	0,11
4'	5175,30	***5172,00***			0,06

Jól látható, hogy az eltérés egy kiugró esetet kivéve *1,5%* alatt maradt, az eltérések átlaga a felharmonikusoknál *0,83%*, míg a harmonikusok felénél *0,54%* (a kiugróan nagy eltérés ebben benne foglaltatik). A mért értékek felénél általában majdnem tökéletes pontossággal meg lehetett találni a feles gerjesztési helyeket.

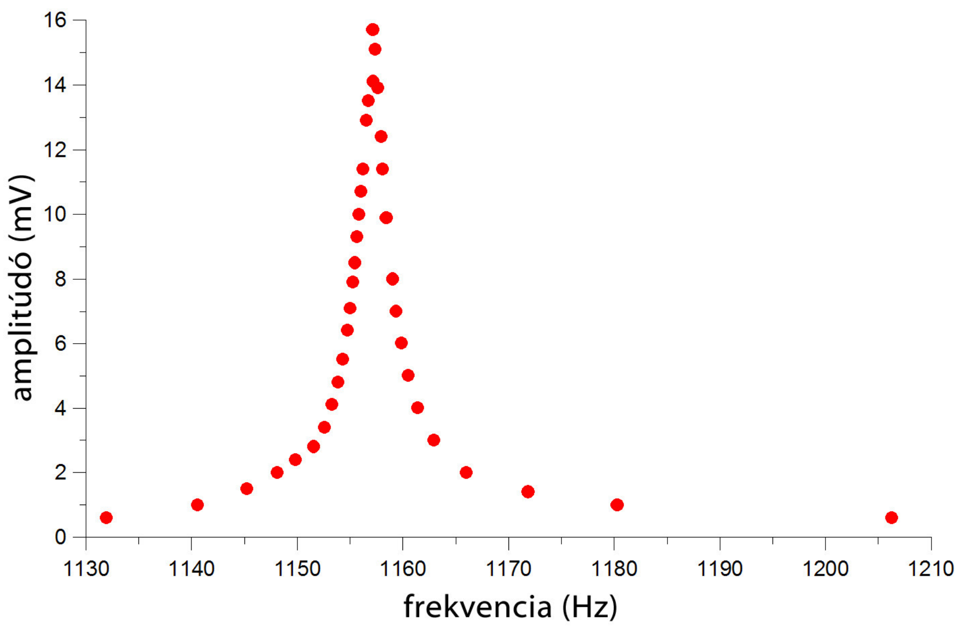
Megjegyzés: érdekes jelenség lépett fel nagyjából az 5000 Hz feletti csúcsok esetén; mintha kettős csúcsa lett volna a rezonanciagörbének, és a folytonos frekvenciaállítás alatt meg lehetett figyelni, hogy miközben átbillen ezen a kettős csúcson, mintha „fázist váltott volna", és mindkét fázisban lett volna egy maximuma. Ez semmiképp nem tudható be a minta tehetetlenségének, hiszen igen lassan állítottam a gerjesztő-feszültséget. Ezen jelenség miatt itt a csúcsok kimérése a kevésbé jól definiáltság miatt pontatlanabb volt.

2. A REZONANCIAGÖRBE KIMÉRÉSE. Első nekifutásra az alapharmonikus környékén próbáltam kimérni a rezonanciagörbe pontjait, de a mellékelt kéziratos jegyzőkönyvi anyagon is jól látszik, hogy a mérést ezen pont környezetében nem találtam megfelelően pontosnak vagy reprodukálhatónak, így az első felharmonikust választottam, mely már az 1. pontban végzett mérések során is a legintenzívebbnek, bizonyos szempontból a legkontrasztosabbnak bizonyult.

Lássuk a mérési adatokat (a leolvasási hibák: ±0,005Hz és ±0,05mV):

ν (Hz)	*A (mV)*
1131,96	0,6
1140,55	1,0
1145,23	1,5
1148,12	2,0
1149,85	2,4
1151,59	2,8
1152,60	3,4
1153,31	4,1
1153,86	4,8
1154,30	5,5
1154,74	6,4
1155,01	7,1
1155,29	7,9
1155,44	8,5
1155,65	9,3
1155,85	10,0
1156,02	10,7
1156,22	11,4

ν (Hz)	*A (mV)*
1156,57	12,9
1156,75	13,5
1157,15	15,7
1157,18	14,1
1157,37	15,1
1157,63	13,9
1157,93	12,4
1158,11	11,4
1158,44	9,9
1159,03	8,0
1159,37	7,0
1159,86	6,0
1160,50	5,0
1161,39	4,0
1162,94	3,0
1166,00	2,0
1171,86	1,4
1180,30	1,0
1206,27	0,6



Sajnos a Rezon.exe program hibaüzenetet adott a nyomtatáskor, így nem tudtam az elméleti görbét is tartalmazó másik ábrát mellékelni, de a paramétereket leírom (mellesleg a program kritikán aluli, nem képes a tizedesjegyek kezelésére; ezt először megpróbáltam egy 100-as és 10-es szorzófaktor bevezetésével kijátszani, de ekkora számokra már a vizuálisan tökéletes illeszkedés mellett sem volt hajlandó iterációt végezni, így végül minden értéket kerekítettem, és az így kapott egyébként nem túl szép adatsorra végeztem iterációkat, mely az alapként megjelenő paraméterek alapján is pár lépés után konvergált…).

Az illesztést mutató képernyőkép megtekinthető a http://papics.web.elte.hu/M3screen.jpg webcím alatt.

Az elméleti görbe paraméterei:

$A_{max} = 14{,}28153\ mV$
$f_0 = 1157{,}138\ Hz$
$D_f = 2{,}361506\ Hz$
$y_0 = 0{,}1833295\ mV$

Mivel a program nyomtatóscriptje megmakacsolta magát (közben a Laswin ugyan úgy működött, mint eddig, tehát nem a nyomtatóval volt a baj, főleg hogy valójában pdf-be szerettem volna nyomtatni, de már a kimenet választásáig sem jutottam el…), nem tudtam manuálisan is kimérni a félértékszélességet, ezért azt *(2,36±0,05)Hz*-nek veszem a mérési leírás utasítása szerint.

$$\kappa = D_f \cdot \pi = 7{,}414158662\,Hz$$

$$\frac{\Delta D_f}{D_f} = 0{,}02118644 \Rightarrow \Delta D_f = 0{,}05$$

κ=(7,4±0,2)Hz

A rúd hossza tolómérővel, alapja és magassága csavarmikrométerrel (leolvasási hiba *±0,005mm*, de hibának az átlag empirikus szórását fogom használni) mérve (a hossz nem a teljes, csak a rezgő hossz, a satuban levő rész nem számít):

i	a_i (mm)	$\Delta a_i = a_i - a_{átl}$	$(\Delta a_i)^2$ (mm^2)
1	15,14	0,00875	0,0000765625
2	15,13	-0,00125	0,0000015625
3	15,13	-0,00125	0,0000015625
4	15,14	0,00875	0,0000765625
5	15,13	-0,00125	0,0000015625
6	15,12	-0,01125	0,0001265625
7	15,13	-0,00125	0,0000015625
8	15,13	-0,00125	0,0000015625

Itt $\Delta a_i = a_i - a_{átlag}$ és az a_i az alap i-edik mérésének az eredménye. $a_{átlag}=15,131250mm$. A hiba számításához:

$$s_{a_{átl}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}(\Delta a_i)^2}{8\cdot 7}} = 0,002265817mm$$

a=(0,015131±0,000002)m

i	*b_i (mm)*	*$\Delta b_i=b_i-b_{átl}$*	*$(\Delta b_i)^2$ (mm^2)*
1	1,97	-0,05	0,0025
2	2,01	-0,01	0,0001
3	2,04	0,02	0,0004
4	2,05	0,03	0,0009
5	2,05	0,03	0,0009
6	2,02	0,00	0,0000
7	2,01	-0,01	0,0001
8	2,01	-0,01	0,0001

Itt $\Delta b_i = b_i - b_{átlag}$ és a b_i a magasság i-edik mérésének az eredménye. $b_{átlag}=2,02mm$. A hiba számításához:

$$s_{b_{átl}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}(\Delta b_i)^2}{8\cdot 7}} = 0,009449111mm$$

b=(0,002020±0,000009)m

Emellett a rúd többszöri méréssel ***l=(0,07830±0,00005)m***

A rezonanciafrekvencia meghatározásának relatív hibájához nem csináltam méréssorozatot, mert amikor a görbét kimértem, többször ráálltam a maximális értékre, és így „tapasztaltam", hogy a beállítás pontossága durván ***Δν=0,02Hz.***

A Young-modulusz számításánál a rezonanciagörbe mérésénél vett két maximális érték és az 1. mérésben vett maximális érték átlagát veszem az első felharmonikus frekvenciájának, így talán jobban közelítem a valódi értéket, így legyen a számításban

ν_{01} =(1157,08±0,02)Hz

A sűrűségnek az irodalmi értéket használom: ***ρ =*** ***kg/m^3***

Ezekkel az adatokkal most számítsuk ki a Young-moduluszt:

$$E=\frac{\left(\frac{\omega_{i0}l^2}{k_i^2}\right)^2}{I}\rho q=\frac{\left(\frac{\nu_{10}\cdot 2\pi\cdot l^2}{k_1^2}\right)^2}{I}\rho q=\frac{\left(\frac{1157{,}08\cdot 2\pi\cdot 0{,}0783^2}{4{,}69409^2}\right)^2}{\frac{1}{12}0{,}015131\cdot 0{,}00202^3}\rho\cdot 0{,}000030473=$$

$$=\left(\rho\left[kg/m^3\right]\cdot 1{,}199782791\cdot 10^7\right)Pa$$

$$\frac{\Delta E}{E}=2\frac{\Delta\nu}{\nu_0}+4\frac{\Delta l}{l}+2\frac{\Delta b}{b}=2\frac{0{,}02}{1157{,}08}+4\frac{0{,}00005}{0{,}0783}+2\frac{0{,}000009}{0{,}00202}=1{,}149973928\cdot 10^{-2}$$

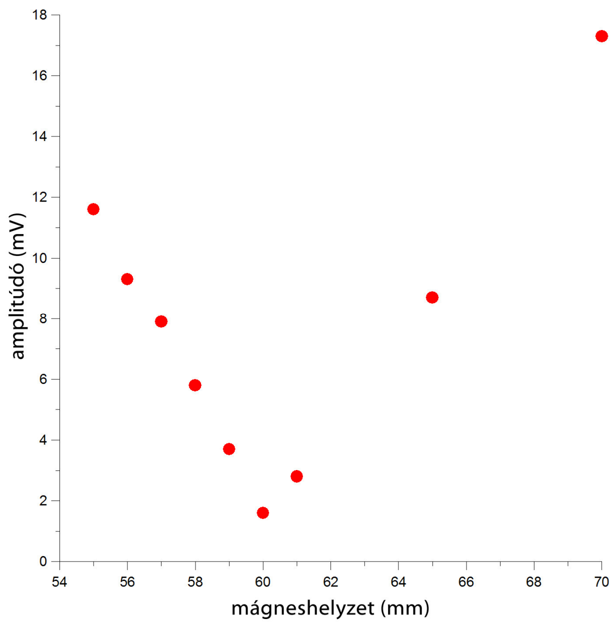
$$\Rightarrow \Delta E=$$

Végül a Young-modulusz:

E=(±   )·10 Pa

Ezen a mintán kimértem a gerjesztő mágnes távolságát változtatva a CSOMÓPONT helyét is (közelítő mérés – a csomópontban nem lehet gerjeszteni):

d (mm)	*A (mV)*
55	11,6
56	9,3
57	7,9
58	5,8
59	3,7
60	1,6
61	2,8
65	8,7
70	17,3



Mivel a mágnes helyzetét csak *1mm*-es pontossággal tudtam állítani, így a csomópont így adódó helye *(60,0±0,5)mm*-re van a minta befogott végétől. A számított érték pedig *0,774·l = (60,60±0,04)mm.*

Nem láttam különösebb értelmét ilyen hibák mellett még két egyenest illeszteni és metszéspontot számolni, de végül azért gnuplottal megcsináltam a két egyenes illesztését (a *60mm*-es pontot belevettem a baloldali, de kihagytam a jobboldali ponthalmazból, mert az elméleti érték azt súgta, hogy ott még nincs minimum), kiszámoltam a metszéspontot, és *60,20830776 ≈ 60,2mm* adódott, de az illesztés hibája természetesen kisebb lett a beállítás hibájánál, így utóbbit véve a csomópont helye: ***l_0=(60,2±0,5)mm***, ami már hibahatáron belüli értéket is ad.

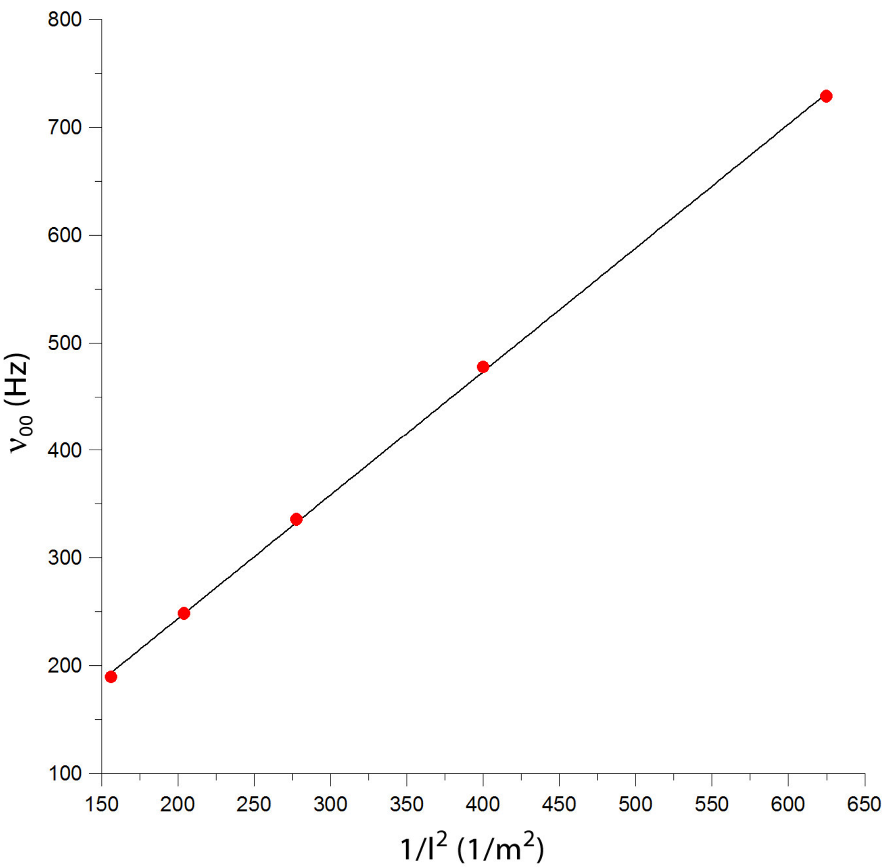
3. A HOSSZFÜGGÉS KIMÉRÉSE. Az alapharmonikusokat és első felharmonikusokat kerestem meg különböző rezgőhosszak esetén. Ezt a mérést a 16-os mintán végeztem el.

A mérési eredmények táblázatba foglalva (a leolvasási és beállítási hibák megegyeznek az 1. mérésben leírtaknak):

hossz (m)	***$1/l^2$***	***ν_{00} (Hz)***	***ν_{01} számított (Hz)***	***ν_{01} mért (Hz)***	***eltérés (%)***
0,08	156,25	189,58	1188,08	1183,91	0,35
0,07	204,08	248,39	1556,64	1550,54	0,39
0,06	277,78	335,58	2103,05	2059,52	2,07
0,05	400,00	477,67	2993,51	2984,60	0,30
0,04	625,00	728,58	4565,95	nem kimutatható	

Az első felharmonikusokat azért kerestem meg, hogy biztos legyek benne, eredendően az alapharmonikusokat találtam meg.

Ábrázoljuk a frekvenciát *$1/l^2$* értékek függvényében:



A pontokra gnuplottal egyenest illesztettem, ennek adatai a következők:

$m=(1,15\pm0,01) Hz/m^2$

$b=(14,2147\pm4,058) Hz$

A minta geometriai és fizikai adatai:

A sűrűségnek az irodalmi értéket használom: **$\rho =$** **kg/m^3**

Az hasáb alapjának mérete (a hibákra vonatkozóan lásd ezen jegyzőkönyv második mérését):

i	a_i (mm)	$\Delta a_i=a_i-a_{átl}$	$(\Delta a_i)^2$ (mm^2)
1	15,13	0,04375	0,0019140625
2	15,09	0,00375	0,0000140625
3	15,09	0,00375	0,0000140625
4	15,09	0,00375	0,0000140625
5	15,08	-0,00625	0,0000390625
6	15,07	-0,01625	0,0002640625
7	15,07	-0,01625	0,0002640625
8	15,07	-0,01625	0,0002640625

Itt $\Delta a_i = a_i - a_{átlag}$ és az a_i az alap i-edik mérésének az eredménye. $a_{átlag}=15,08625mm$. A hiba számításához:

$$s_{a_{átl}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8} (\Delta a_i)^2}{8 \cdot 7}} = 0,007055266 mm$$

$a=(0,015086\pm0,000007)m$

A hasáb magassága:

i	b_i (mm)	$\Delta b_i=b_i-b_{átl}$	$(\Delta b_i)^2$ (mm^2)
1	3,03	0,00375	0,0000140625
2	3,02	-0,00625	0,0000390625
3	3,03	0,00375	0,0000140625
4	3,02	-0,00625	0,0000390625
5	3,03	0,00375	0,0000140625
6	3,03	0,00375	0,0000140625
7	3,02	-0,00625	0,0000390625
8	3,03	0,00375	0,0000140625

Itt $\Delta b_i = b_i - b_{átlag}$ és a b_i a magasság i-edik mérésének az eredménye. $b_{átlag}=3,02625mm$. A hiba számításához:

$$s_{b_{átl}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}(\Delta b_i)^2}{8 \cdot 7}} = 0{,}001829812mm$$

b=(0,003026±0,000002)m

Ezen adatok ismeretében a Young-modulusz számolható:

$$E = \frac{4\pi^2}{k_1^4} \cdot \frac{\rho q}{I} m^2 = \frac{4\pi^2}{4{,}69409^4} \cdot \frac{0{,}00004565}{\frac{1}{12} 0{,}015086 \cdot 0{,}003026^3} 1{,}15^2 \cdot \rho =$$

$$= \left(\rho\left[kg/m^3\right] \cdot 1{,}409259342 \cdot 10^5\right) Pa$$

$$\frac{\Delta E}{E} = 2\frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta b}{b} = 2\frac{0{,}01}{1{,}15} + 2\frac{0{,}000002}{0{,}003026} = 0{,}018713181 \Rightarrow \Delta E =$$

<u>E=(±   )·10 Pa</u>

Ez „kissé" kevésnek tűnik, szerintem a számolásom jó, úgyhogy vagy a mérési módszer nem megfelelő, vagy a mérőeszközök nincsenek megfelelően kalibrálva.

Adathiány miatt itt a számolások nincsenek befejezve, de a megfelelő sűrűségadat behelyettesítésével minden eredmény egyből adódik.